CLASE 15. Series de Potencias

Definición 15.1 (Serie de Potencias Complejas)**.** Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

donde $z_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ son números complejos y z denota una variable compleja se llamará una serie (de potencias) en potencias de $(z-z_0)$. Los números c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son los coeficientes de la serie de potencias. A veces diremos serie de potencias en un entorno de z_0 (o centrada en z_0).

Estas series de potencias se pueden llevar a la expresión (numérica) conocida $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, escribiendo $z_n = c_{n-1}(z-z_0)^{n-1}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

El siguiente teorema mostrará que el conjunto de todos los z en los cuales la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ converge absolutamente es el plano complejo $\mathbb{C}$ ó el interior de un círculo centrado en z_0 ó el único punto z_0.

Teorema 15.2. *Cada serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ *tiene un* radio de convergencia R *tal que si* $0 < R < \infty$, *entonces la serie converge absolutamente en* $|z-z_0| < R$ *y diverge en* $|z-z_0| > R$; *cuando* $R = 0$, *la serie converge sólo en* $z = z_0$ *y si* $R = +\infty$, *la serie converge (absolutamente) para todo* $z \in \mathbb{C}$. *El número real* R *está dado por*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$ [1]

suponiendo que existe este límite.

Definición 15.3 (Disco o Círculo de Convergencia)**.** Cuando $0 < R < \infty$, llamamos al círculo $\{z : |z-z_0| < R\}$ el círculo (o disco) de convergencia (de la serie). En la frontera $\{z : |z-z_0| = R\}$, la serie puede converger en algunos puntos y diverger en otros.

[1] Fórmula que proviene del critero de la raíz (para el criterio del cociente hay una fórmula similar), aplicado a la serie numérica correspondiente a la serie de potencias.

Definición 15.4 (Serie de Potencias representa una función)**.** Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ converge a $f(z)$ para cada punto $z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, diremos que la serie representa la función f en $\mathcal{D}$ y escribimos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Escribiremos los tres siguientes teoremas sin demostración.

Teorema 15.5 (Taylor)**.** *Sea $f(z)$ una función analítica en el disco (abierto) $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-z_0| < R\}$. Entonces para cada $z \in \mathcal{D}$ se cumple que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \tag{1}$$

Es decir, la serie (1) *representa la función $f(z)$ en $\mathcal{D}$.*

Definición 15.6 (Serie de Taylor)**.** A la serie (1) se le llama serie de Taylor de $f(z)$ en un entorno del punto z_0. Si $z_0 = 0$ se obtiene la serie (llamada Serie de MacLaurin)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Gracias a la convergencia absoluta de las series de potencia (ver Teorema 15.2), tenemos

Teorema 15.7. *Una serie de potencias representa una función continua en cada punto interior al disco de convergencia, es decir, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ representa una función continua $f(z)$ para cada z en el disco de convergencia $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-z_0| < R\}$, siendo $R \neq 0$ el radio de convergencia de la serie.*

Además, en el disco (círculo) de convergencia, una serie de potencias puede ser integrada o derivada término a término y representa una función analítica.

Teorema 15.8. *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ en $|z-z_0| < R$ entonces*

a) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(w)\, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z} (w-z_0)^n \, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$ *en* $|z-z_0| < R$.

Note que hemos tomado el límite inferior de la integral anterior como el propio z_0 (el centro del disco). De no tomarse así, aparecería una serie numérica adicional (la serie que resulta al evaluar la antiderivada en el punto inicial).

b) f es analítica en cada punto interior al disco de convergencia.

c) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (z - z_0)^{n-1}$ *en* $|z - z_0| < R$.

Se puede probar entonces que la representación de una función analítica por medio de una serie de potencias, en un entorno de un punto, es única y, por lo tanto (Teorema 15.5), dicha serie es precisamente su serie de Taylor.

Teorema 15.9. *Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n$ *converge a la función* $f(z)$ *en un disco* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - z_0| < R\}$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n$ *es la Serie de Taylor* (1) *de* f *alrededor de* z_0.

Prueba. La prueba consiste en derivar la expresión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

término a término y evaluar en el punto $z = z_0$. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} f'(z) &= c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \cdots + n\, c_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots \\ &\Rightarrow\; f'(z_0) = c_1, \text{ es decir, } c_1 = f'(z_0). \\ f''(z) &= 2c_2 + 3 \cdot 2(z - z_0) + \cdots + n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2} + \cdots \\ &\Rightarrow\; f''(z_0) = 2c_2, \text{ es decir, } c_2 = \frac{f''(z_0)}{2}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= n!\, c_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2\,(z - z_0) + (n+2)(n+1)n \cdots 3\,(z - z_0)^2 + \cdots \\ &\Rightarrow\; f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n, \text{ de donde, } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \end{aligned}$$

válido para $n = 0, 1, 2, \cdots$

Usando inducción se completa la prueba. □

Escribimos la serie de Taylor (y su región de convergencia) para algunas funciones elementales:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$ en $|z| < 1$.

ii) $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

iii) $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

iv) $\operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

v) $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

vi) $\operatorname{senh} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

vii) $\operatorname{Log}(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \cdots, \quad$ en $|z| < 1$.

15.1 Series de Laurent

Consideremos una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ convergente en $|w| < r$ con $r > 0$. Si sustituimos w por $\dfrac{1}{z-z_0}$, la serie resultante, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, es convergente en $\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right| < r$, es decir, en $|z-z_0| > \frac{1}{r}$. Llamando $r_1 = \frac{1}{r}$, esta serie converge entonces en la región exterior al disco $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-z_0| \le r_1\}$. En esta región, ella representa una función $g(z)$ analítica, así que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad \text{en } |z-z_0| > r_1.$$

Supongamos ahora que la (otra) serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge en un disco $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-z_0| < r_2\}$ (con $r_2 > 0$), representando allí una función $h(z)$ analítica,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < r_2.$$

Si $r_1 < r_2$ entonces la función $f(z)$ definida por $f(z) = g(z) + h(z)$ es analítica en la región intersección, es decir, en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z-z_0| < r_2\}$. Así se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{en } r_1 < |z-z_0| < r_2.$$

Denotando $c_n = \begin{cases} b_{-n} & \text{si } n < 0 \\ a_0 + b_0 & \text{si } n = 0 \\ a_n & \text{si } n > 0 \end{cases}$, podemos expresar la suma de las dos series anteriores así

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad r_1 < |z - z_0| < r_2.$$

Definición 15.10 (Serie de Laurent)**.** A la serie anterior, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, la llamaremos la serie de Laurent de la función f y al anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, su región de convergencia.

Podemos así escribir

Teorema 15.11. *Una serie de la forma* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *representa una función analítica en el anillo* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$*, donde* r_1 *es el radio de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ *y* r_2 *es el radio de convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

El siguiente teorema (de Laurent) es esencialmente el recíproco del teorema anterior y es una generalizacíon del teorema de Taylor.

Teorema 15.12 (Laurent)**.** *Sea* f *una función analítica en un anillo* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; r_1 < |z - z_0| < r_2, \;$ *con* $r_1 < r_2\}$*. Entonces, para cada* $z \in \mathcal{D}$ *se tiene que* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$*, donde*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y C *es cualquier curva simple cerrada en* $\mathcal{D}$ *que contiene a* z_0 *en su región interior. La integral sobre* C *es en el sentido positivo.*

***Observación* 15.13.** Para ver que la serie de Laurent es una generalización de la serie de Taylor, suponemos que la función $f(z)$ es analítica en todo el disco $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z - z_0| < r_2\}$. Entonces todas las funciones $\dfrac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}$ $(n = -1, -2, \ldots)$ son analítica en $\mathcal{D}_1$ y así

$c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, \ldots$ son todos nulos y la serie que resulta es la serie de Taylor de f, ya que por las fórmulas integrales de Cauchy (**??**), se tiene que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w$$

y, por tanto,

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

***Observación* 15.14.** Para el anillo de convergencia $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ de la serie de Laurent de f existen dos casos extremos:

a) Si $r_1 \to 0$ entonces $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; 0 < |z - z_0| < r_2\}$, es decir, el disco abierto de radio r_2 sin el centro.[2]

b) Si $r_2 \to \infty$ entonces $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; r_1 < |z - z_0|\}$, es decir, la región exterior al disco de radio r_1 y centro z_0.

***Observación* 15.15.** Las propiedades que se refieren a series de potencias se extienden a las series de la forma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. En particular, las series de Laurent se pueden derivar e integrar término a término en el anillo de convergencia. Además, son únicas.

***Observación* 15.16.** Las series de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ se pueden sumar, restar (término a término) y multiplicar en sus regiones comunes (intersección).

Si se dividen dos series de potencias o dos series de tipo Laurent (que no se anulen), se obtiene otra serie (de potencias o de tipo Laurent, dependiendo de las series) en la región común (intersección). Así, por ejemplo, si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en $\mathcal{D}_1 \; : \; r_1 < |z - z_0| < r_2$ y si $g(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ en $\mathcal{D}_2 : \; R_1 < |z - z_0| < R_2$, con $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \neq \emptyset$, entonces

a) El producto $f(z)\, g(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en $\mathcal{D}$, con

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

[2] Esto es lo que algunos llaman un *disco pinchado*.

b) Para $g(z) \neq 0$ en $\mathcal{D}$, existe una serie $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ y números reales $\rho_1 < \rho_2$ tales que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{en } \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2.$$

Ejemplo 15.17. Halle la función a la cual converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ y el círculo de convergencia.

Solución. Partiendo de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z} \quad \text{en } |z| < 1$$

y derivando término a término obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + \cdots + n z^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Multiplicando por z,

$$z\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2}, \text{ es decir, } \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Derivando de nuevo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = 1 + 2^2 z + 3^2 z^2 + \cdots + n^2 z^{n-1} + \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right]$$

de donde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Multiplicando por z será

$$z\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \quad \text{en } |z| < 1. \text{ Luego,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Ejemplo 15.18. Halle la serie de Taylor de la función $f(z) = \dfrac{z}{i+z}$ en un entorno de $z = 0$ y encuentre su radio de convergencia.

Solución. Escribimos $f(z) = \dfrac{z}{i(1+\frac{z}{i})} = \dfrac{z}{i}\dfrac{1}{1+\frac{z}{i}}$.

Usando la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ en $|z| < 1$ se tiene que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ en $|z| < 1$ y así

$$\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n \quad \text{en } |z| < 1 \text{ ya que } \left|\frac{z}{i}\right| = |z|.$$

Luego

$$f(z) = \frac{z}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{i^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{i^{n+1}} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Ejemplo 15.19. Halle la serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ en potencias de $(z-2)$ en

a) el *disco pinchado* (o reducido) $0 < |z-2| < 1$.

b) la región $|z-2| > 1$.

Solución.

a) Escribimos $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{1+(z-2)}$. De la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ en $|z| < 1$ se obtiene que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n = \frac{1}{1+(z-2)}$ en $|z-2| < 1$.

Luego, si $0 < |z-2| < 1$ es

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)}\frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1} = \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - \cdots \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n \end{aligned}$$

b) Si $|z-2|>1$ es $\dfrac{1}{|z-2|}<1$. Así

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{(z-2)}\frac{1}{(1+\frac{1}{z-2})}.$$

Desarrollando por serie geométrica (ya que $\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$) es

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(z-2)}\frac{1}{(z-1)}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}\end{aligned}$$

***Observación* 15.20.** También podemos resolver éste último ejercicio por fracciones simples: Como

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-1)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2},$$

entonces desarrollando en serie (apropiadamente) cada uno de éstos términos y sumado ambas, obtenemos la serie pedida. Así, para la parte (a),

$$f(z)=\frac{-1}{1+(z-2)}+\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n+\frac{1}{z-2}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n.$$

Para la parte b),

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{-1}{(z-2)\left(1+\frac{1}{z-2}\right)}+\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}+\frac{1}{z-2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}.\end{aligned}$$